Аксиоматика теории множеств.

Маторин Р. А. ИВТ-21

**1 ВВЕДЕНИЕ**

Как известно, в любой аксиоматической теории сначала выбирают основные понятия. Основным понятием теории множеств является понятие самого множества. Множество образуется путем отбора определенных объектов и полностью ими определяется.

Можно конкретизировать первичное понятие элемента множества и наложить на него некоторые ограничения, которые

позволят избежать парадоксов. Также парадоксов можно избежать, если ввести совокупности объектов двух сортов, одну из них называть классами, другую – множествами, причем класс может являться множеством только в том случаи он сам является элементом других классов.

Кроме того, следует считать, что множества строятся по шагам (в логическом, а не во временном смысле). Когда же множество еще строится путем выбора его элементов, то оно не готово как объект и его нельзя использовать в качестве элемента, например, самого себя.

Целесообразно ограничиться рассмотрением только тех множеств, существование которых может быть доказано на основе некоторой системы аксиом. Такая система предложена Э. Цермело в 1908 году, затем она была несколько расширена А. Френкелем и носит название системы аксиом Цермело-Френкеля (ZF).

Аксиомы ZF включают в себя несколько групп:

* Высказывания о равенстве множеств.
* Высказывания о существовании множеств.
* Высказывания об образовании множеств из уже имеющихся множеств.
* Высказывания об упорядоченности образованных множеств.

**2 СИСТЕМА АКСИОМ ЦЕРМЕЛО-ФРЕНКЕЛЯ (ZF)**

1. **Аксиома объемности** (экстенсиональности). Всякое множество полностью определяется своими элементами. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов.
2. **Аксиома объединения** (суммы). Объединение всех элементов любого множества A есть множество.
3. **Аксиома подстановки** (замены). Для каждого множества A и функции f,

определенной на A, существует множество, содержащее в точности объекты f(x).

.

1. **Аксиома регулярности** (фундирования). Множество A называется фундированным, если оно имеет минимальный элемент. Любое непустое множество имеет минимальный элемент.
2. **Аксиома бесконечности**. Она гарантирует существование бесконечного множества – множества натуральных чисел.
3. **Аксиома выделения**. Для любого множества A, состоящего из элементов a и свойства F существует множество В, состоящее их элементов множества А, для которых F(a) истинно.

Иногда вместо аксиомы выделения в систему аксиом включают две аксиомы:

1. Аксиома существования пустого множества
2. Аксиома существования пары «*если и, то*»:

Для того, чтобы система аксиом была полной, к ней добавляют еще одну из двух аксиом:

* Аксиома выбора (AC).
* Аксиома детерминированности (AD).

**3 АКСИОМА ВЫБОРА**

Функция выбора: для элементов х множества Х задано множество . В каждом из них выбирают элемент у. Тогда получим функцию f такую, что:

Аксиома выбора гласит, что для всякого семейства непустых множеств существует функция выбора.

Например, пусть имеется бесконечное число пар ботинок. Функция, выбирающая из каждой пары только левый ботинок и сопоставляющая его этой же паре, называется функцией выбора.

Интересно, что, если бы мы оперировали только конечными множествами, в аксиоме выбора не было бы необходимости. Но бесконечные множества применяются в математике повсеместно, а для них в общем виде аксиома выбора не выводится и должна постулироваться.

Рассмотрим еще один пример, схожий с предыдущим. У нас имеются множества из пар носков, где каждый из носков левый. Наша задача – определить функцию выбора, если все элементы неразличимы. Как это сделать?

Вот здесь и приходит на помощь аксиома выбора, а точнее эквивалентная ей теорема Цермело, которая утверждает, что любое множество можно сделать "вполне упорядоченным", т.е. таким, что в любом его подмножестве есть минимальный элемент.

Проще всего пронумеровать носки в каждой паре номерами 1 и 2, а функцию выбора определить, как выборку только "нечетных носков". Но, сама возможность такой нумерации выводится только из аксиомы выбора, другого варианта, к сожалению, нет.

Нужно отметить, несмотря на то, что без помощи аксиомы выбора многие утверждения не удалось бы доказать, её использование, зачастую, приводит к самым разным парадоксам.

**4 АКСИОМА ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ**

Аксиому детерминированности предложили в 1962 году польские математики Ян Мычельский и Гуго Штейнгауз в качестве замены для аксиомы выбора (введённой в 1904 году).

Аксиому детерминированности проще всего определить в терминах не теории множеств, а теории игр.

Рассмотрим множество A бесконечных последовательностей натуральных чисел, определяющих следующую бесконечную игру для двух игроков. Игрок I пишет натуральное число , затем игрок II пишет натуральное число и так далее по очереди. Если получающаяся в результате игры последовательность принадлежит множеству A, то выигрывает игрок I, в противном случае игрок II. Игра называется детерминированной, если либо игрок I, либо игрок II имеют выигрывающую стратегию.

Множество A и соответствующая игра  называются детерминированными, если у одного из игроков существует выигрывающая стратегия.

**5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В классических разделах математики (теория чисел, математический анализ и др.) замена AC на AD ничего не меняет, но в теории множеств и топологии (науки, изучающей свойства пространств, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях) следствия из аксиомы детерминированности во многом существенно отличаются от следствий аксиомы выбора. Аксиома детерминированности создана с целью получить более привлекательные следствия, чем те, что дает аксиома выбора.

Аксиома выбора имеет ряд следствий, являющихся в определенной степени нежелательными, или приводят к «парадоксальным» примерам множеств, противоречащим нашей интуиции, вроде парадокса Банаха – Тарского: используя аксиому выбора, можно разбить шар на конечное число частей, которые затем можно переставить так, что получится два шара такого же размера, как и исходный шар.

Аксиома детерминированности (AD) противоречит аксиоме выбора (AC). В свою очередь AD в отличие от AC не дает ясной картины бесконечных мощностей и почти не используется в топологии.

Многие следствия конкурирующих аксиом в теории множеств и топологии противоположны друг другу. С помощью аксиомы выбора доказано, что существуют неизмеримые множества вещественных чисел; из аксиомы детерминированности следует, что таких множеств не существует — все множества вещественных чисел измеримы.

По-разному решается проблема континуума (существование промежуточных мощностей между счётной и континуальной) — аксиоматика Цермело — Френкеля допускает любой из двух вариантов решения этой проблемы (то есть, она не может быть ни доказана, ни опровергнута), в то время как из аксиомы детерминированности выводится однозначное решение: любое бесконечное несчётное множество вещественных чисел континуально (определено на всех точках числовой оси или её отрезка).